Réduction des endomorphismes normaux (106, 148, 150, 151, 152, 157, 158)

Gourdon, Algèbre p. 271

Lem 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E u-stable. Alors $F^\perp$ est u^*-stable.

démo : Soit $x \in F$, par hypothèse $u(x) \in F$ donc $\forall y \in F^\perp$ $0 = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$
Ceci est vrai pour tout $x \in F$, donc on a $u^*(y) \in F^\perp$. Comme on peut choisir y comme l'on veut dans $F^\perp$, on a donc $F^\perp$ est u^*-stable.

Lem 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est sep de u associé à λ, alors $E_\lambda^\perp$ est u-stable.

démo : Comme u et u^* commutent, on a que E_λ est u^*-stable. Donc d'après le lem 1, $E_\lambda^\perp$ est $u^{**} = u$-stable.

Lem 3 : Soit E euclidien de dim 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal sans vp réelle. Dans toute base orthonormale B de E on a $\underset{B}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

démo : Soit B bon, on pose $M = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

- On a $b \neq 0$ car u est ss vp réelle. Comme u est normal et B bon on a $MM^* = M^*M$

Ainsi on obtient les égalités suivantes : $a^2 + c^2 \underset{\circledast}{=} a^2 + b^2$ et $ab + cd \underset{\circledast}{=} ac + bd$.

$\circledast \Rightarrow b^2 = c^2$ donc si $b = c$ alors M symétrique, impossible car u ss vp réelle. Donc $b = -c$

$\circledast \Rightarrow 2(a-d)b = 0$, comme $b \neq 0$, on a $a = d$.

Ainsi M est de la forme souhaitée.

thm 4 : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une bon B de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

démo : Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$.

- init : $n = 1$, ok
- héré : Supposons $HR(n-1)$ vraie et montrons le au rang n.

* Si u admet λ comme vp réelle, on pose E_λ sep de u associé à λ.
Alors $F = E_\lambda^\perp$ est u-stable (lem 2) et u^*-stable (lem 1). Comme $u|_F$ et $u^*|_F$ commutent et que $\dim F \leq n-1$, il existe B_1 de F par HR et si on prend B_2 bon de E_λ.
Alors $B_1 \cup B_2$ convient.

* Si u est ss vp réelle. Soit $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ $(\alpha^2 - \beta < 0)$ de Π_u et on note $N = \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Mq $N \neq \{0\}$.

Si $N = \{0\}$, alors $Q(u)$ serait inversible. On note R tel que $\Pi_u = RQ$ et on a alors $Q(u)R(u) = 0$
or $Q(u)$ est inversible donc $R(u) = 0$. Contradiction avec Π_u polynôme minimal de u.

On a N qui est u-stable et N est aussi u^*-stable. On pose $u_{|N} = v$, alors v^*v est symétrique et admet donc une vp réelle λ.

Soit $x \in N \setminus \{0\}$ tel que $v^*v(x) = \lambda x$. On pose $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Comme u n'a pas de vp réelle, $(x, u(x))$ est une famille libre donc $\dim F = 2$.
F est u-stable car $x \in N$ donc $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x$.
Ceci entraine que $F = \mathrm{Vect}(u^2(x), u(x))$ car $\beta \neq 0$ puisque Q irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.
On rem que F est u^*-stable puisque

$$u^*u(x) = v^*v(x) = \lambda x \in F \quad \text{et} \quad u^*u^2(x) = u u^* u(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) \in F.$$

Comme $u^*_{|F} = (u_{|F})^*$, $u_{|F}$ est normal. D'après le lem 3, dans une bon B_2 de F, la matrice $u_{|F}$ est de la forme $\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Comme F est u-stable et u^*-stable, on a $F^\perp$ est u^*-stable et $u^{**} = u$-stable (lem 1)

Donc $(u_{|F^\perp})^* = u^*_{|F^\perp}$ et $u_{|F^\perp}$ est normal. Comme $\dim F^\perp = n - 2 < n$

par HR, il existe B_1 bon de $F^\perp$ tel que la matrice de u soit de la forme voulue

Ainsi $B = B_1 \cup B_2$ convient.

- Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

Questions : Reduction des endomorphismes normaux.

- Si M est symetrique alors M a une valeur propre réelle.

Soit λ une valeur propre de M alors $\exists X$ tel que $MX = \lambda X$.

Ainsi $^t\bar{X} M X = \lambda\, ^t\bar{X}X \Rightarrow {}^t(^t\bar{X}MX) = \lambda\, ^t(^t\bar{X}X)$

$\Rightarrow {}^tX\, ^tM\, \bar{X} = \lambda\, ^tX\bar{X}$

$\Rightarrow {}^t\bar{X}\, ^t\bar{M} X = \bar{\lambda}\, ^t\bar{X}X$

Or $\bar{M} = M$ car $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $^tM = M$ car M est symétrique.

Donc $^t\bar{X}MX = \lambda\, ^t\bar{X}X$

$= \bar{\lambda}\, ^t\bar{X}X$

On prend $X = (x_1, \ldots, x_n)$ alors $^t\bar{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ donc $^t\bar{X}X \neq 0$ car $x \neq 0$

Ainsi $\lambda = \bar{\lambda}$ autrement dit $\lambda \in \mathbb{R}$.